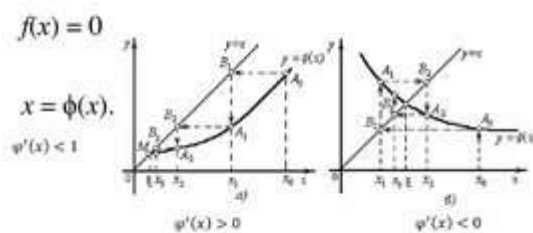


Метод простой итерации

Метод простой итерации — это численный метод решения уравнений и систем уравнений, основанный на последовательном приближении к решению с помощью итераций. Он относится к классу одношаговых методов, так как каждое новое приближение строится на основе только одного известного предыдущего значения.

Метод простой итерации



Суть метода

Исходное уравнение или систему уравнений преобразуют к определённому виду, а затем строят последовательность приближений. На каждом шаге используется результат предыдущего вычисления для получения более точного значения.

Для нелинейных уравнений метод заключается в приведении уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = j(x)$, после чего строится последовательность приближений по правилу $x_{(k+1)} = j(x_k)$, где k — номер итерации. Начальное приближение x_0 выбирается исходя из условий задачи или произвольно.

Для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) метод предполагает преобразование исходной системы $Ax = b$ к виду $x = Bx + c$, где B и c — некоторые матрицы и векторы. Итерации проводятся по формуле $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, а процесс продолжается до достижения заданной точности.

Условия сходимости

Для нелинейных уравнений:

- Если в некоторой окрестности корня функция $j(x)$ дифференцируема и $|j'(x)| \leq q$, где $0 \leq q < 1$, то итерационная последовательность сходится к корню при любом выборе начального приближения.
- Метод сходится, если норма матрицы B удовлетворяет условию $\|B\| < 1$.

Для систем линейных уравнений:

- Необходимым и достаточным условием сходимости метода простой итерации при любом начальном приближении является требование, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше 1.

Алгоритм применения

1. Привести исходное уравнение или систему к нужному виду.
2. Выбрать начальное приближение.
3. Выполнить итерации по соответствующей формуле.
4. Прекратить процесс, когда будет достигнута заданная точность.

Особенности

- Скорость сходимости зависит от выбора начального приближения и свойств функции $j(x)$ или матрицы B . Чем меньше норма матрицы или модуль производной в окрестности корня, тем быстрее сходимость.
- Недостаток метода — сходимость только в малой окрестности корня. Если начальное приближение выбрано неудачно, итерационный процесс может расходиться или сходиться к другому корню.
- Существуют модификации метода, например, метод оптимальной простой итерации (метод Чебышёва), где применяется дополнительный параметр для ускорения сходимости.

Пример геометрической интерпретации метода простой итерации можно увидеть на рисунке, где показано построение последовательности приближений к корню через рекуррентное соотношение.